

*MODELES MATHEMATIQUES ET
STEREOMODELES ARCHITECTURAUX :
construction, structure et théorie*

*Jean-Paul SAINT-AUBIN
Conservateur de l'Inventaire général*

Ministère de la Culture

Direction du Patrimoine

Atelier de Photogrammétrie architecturale de
l'Inventaire général des monuments et des
richesses artistiques de la France

Grand-Palais - Porte D - 75008 PARIS (FRANCE)

COMMISSION V

Créé en 1964, le Service de l'Inventaire général des monuments et des richesses artistiques de la France est chargé de rassembler une documentation sur l'ensemble du patrimoine français. Le Service de l'Inventaire général forme une Sous-Direction du Ministère de la Culture; mais, en tant qu'organisme de recherche, il constitue également un laboratoire propre du Centre National de Recherches Scientifiques.

Afin de faire face aux nécessités impérieuses d'établissement de la documentation graphique, une cellule de réflexion s'est mise en place en 1972. Pour répondre aux besoins en relevés d'architecture, celle-ci s'est peu à peu équipée de matériel photogrammétrique; l'Atelier de photogrammétrie architecturale de l'Inventaire général (APAIG) dispose aujourd'hui de l'appareillage le plus moderne qui lui permet de faire face à l'ensemble des problèmes posés par l'analyse photogrammétrique de l'architecture.

Des équipes, constituées dans toutes les régions de la France et relayées dans le cas d'opérations complexes par une équipe nationale, effectuent les opérations de terrain; elles disposent, pour ce faire, de théodolites, niveaux, distancemètres et d'une vingtaine de chambres photogrammétriques diversifiées (des formats 6 x 9 cm au format 4 x 5 inches; de 60 à 200 mm de distances principales -Cf. Illustration n° 1). Plus de six cents édifices ont déjà été relevés et il est possible de dire que, chaque jour, de nouveaux clichés viennent enrichir nos archives photogrammétriques (*).

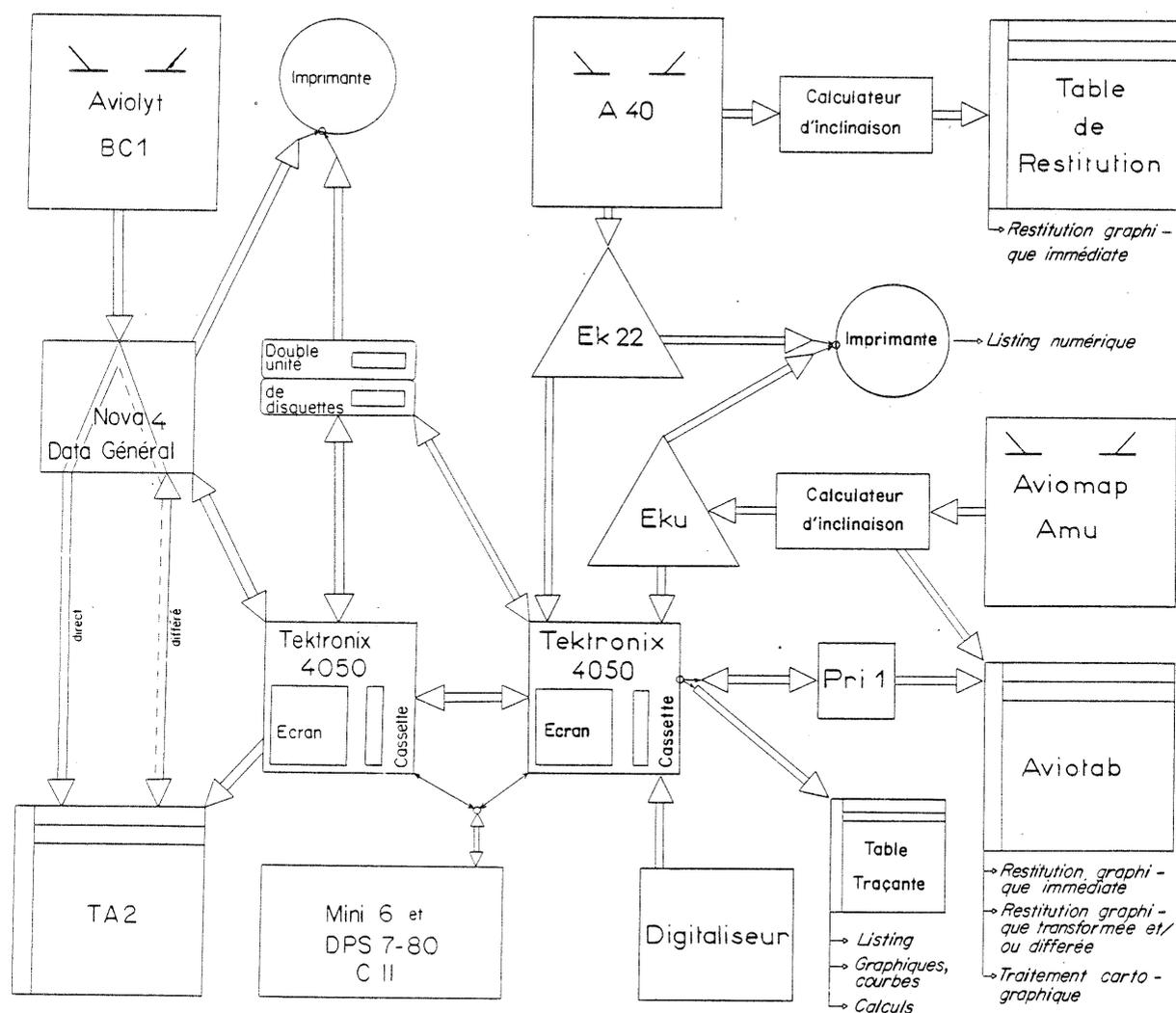
L'équipement de restitution de l'Atelier de photogrammétrie comprend trois appareils de restitution équipés de sorties graphiques et numériques et relayés par des mini-ordinateurs graphiques, eux-mêmes connectés aux ordinateurs du Ministère de la Culture (Cf. Illustration n° 2).

(*) Un premier répertoire des photogrammes de l'Inventaire général est paru au début de 1984 regroupant les travaux exécutés entre 1972 et 1982.

Illustration n° 1 - Equipement de l'APAIG : prises de vue

Chambres de prise de vue	Type		Format	Distance principale
	stéréométrique	simple		
Wild C.120	X		6,5 cm x 9 cm	64 mm
Wild P.32		X	6,5 cm x 9 cm	64 mm
Zeiss SMK 120	X		9 cm x 12 cm	60 mm
Zeiss TMK 60		X	9 cm x 12 cm	60 mm
Wild P. 31/100		X	4 x 5 inches	100 mm
Wild P.31/200		X	4 x 5 inches	200 mm

Illustration n° 2 - Organigramme de l'équipement de restitution de l'APAIG



Les trois conceptions différentes de ces appareils de restitution (Cf. Illustration n° 3) illustrent parfaitement l'évolution en 20 ans des usages en photogrammétrie architecturale.

Illustration n° 3 - Appareils de restitution
de l'APAIG

Restituteurs	Type	Sorties		Connexion informatique	
		graphique	numérique		
Wild A40	analogique	X	EK 22	Tektronix (4050)	DPS7 et Mini 6 de la CII
Wild Aviomap Amu	analogique	Aviotab	EK U	Tektronix (4050)	
Wild BC1	analytique	TA2	Nova/4	Tektronix (4050) Nova/4	

Dans les années 60, la photogrammétrie représente pour l'architecture une machine à dessiner infailible -ce qu'elle est mathématiquement parlant- mais on ne tient pas compte de la complexité et de la brutalité du volume architectural (seule la profondeur du modèle perturbe un peu les fabricants) qui, insidieusement, déforment l'image et la rendent équivoque; l'appareil de restitution analogique -optico-mécanique- reflète cette naïveté.

La seconde génération des appareils analogiques remédie quelque peu à ces avatars en introduisant quelques possibilités supplémentaires de basculement qui facilitent l'obtention d'une image architecturale débarassée des scories qu'infligèrent à l'édifice les multiples campagnes de construction ou de restauration et les dérèglements de la vétusté; mais, là encore, il s'agit de produire du dessin, un dessin : l'analyse des clichés dans l'espace doit être réitérée à chaque nouvelle projection graphique; celle-ci voit s'évaporer sur le plan choisi la troisième dimension et, avec elle, la compréhension réelle des pertinences intimes de l'édifice.

Le restituteur analytique et la connexion à des ordinateurs d'appareils analogiques ouvrent enfin le chemin, la voie royale où la photogrammétrie cesse d'être uniquement l'outil à dessiner pour devenir l'outil et la mémoire vive d'analyses implacables de l'architecture révélant l'équilibre présent de sa structure, les modes de construction et la conception du projet et facilitant ainsi réellement l'approche technique du restaurateur et l'investigation formelle de l'historien.

Un des programmes de recherche mené par l'Atelier de photogrammétrie architecturale illustre parfaitement les fonctions possibles de la photogrammétrie et porte sur la création et la mémorisation de stéréomodèles architecturaux dont l'analyse géométrique permet d'obtenir la modélisation mathématique.

Le projet architectural quel qu'il soit -demeure modeste, palais ou cathédrale- se trouve constitué par l'assemblage autour d'axes multiples, le plus souvent horizontaux ou verticaux, de composants géométriques parfaitement définissables. Les procédés de construction vont altérer la perfection du projet et déformer ce polyèdre complexe que, par ailleurs, le temps va modifier lui-aussi profondément.

La photogrammétrie va permettre la saisie globale du volume architectural effectif que l'on veut étudier; il s'agit de constituer des fichiers numériques spatiaux correspondant aux lignes et surfaces de l'architecture et définissant au mieux ce qui est structure, décor, ... Cette sectorisation et ces hiérarchies introduites reflètent immédiatement une analyse architecturale qui peut néanmoins être remise en cause durant les phases ultérieures (réunion ou division de fichiers par exemple).

La confrontation du stéréomodèle numérisé à des logiciels va assurer la modélisation mathématique du volume architectural. Des programmes de calcul vont définir la nature mathématique, le "lieu géométrique" le plus proche de la forme effective enregistrée dans les fichiers numériques. Ces programmes partent d'une équation générale (coniques, quadriques, ...), organisent les données et calculent par les moindres carrés, la linéarisation des systèmes d'équation, par la méthode d'approximation de Newton, les paramètres de cette équation.

Les caractéristiques géométriques de la forme sont affichées : centre, direction des axes, longueurs, et le chercheur peut alors affiner architecturalement par mode conversationnel la définition formelle en introduisant certaines valeurs de paramètres ou en fixant une forme particulière plus spécifiquement architecturale : la sphère, par exemple, venant remplacer l'hyperboloïde. A chaque instant, les écarts entre le modèle mathématique et le stéréomodèle sont donnés et l'analyse des répartitions d'écarts -leur traduction en courbes isométriques, par exemple-, l'analyse des résultats concernant les différents fichiers vont permettre de dégager des redondances numériques, des modules, des tracés théoriques, tout en auscultant d'une façon particulièrement pertinente les fléchissements, basculements et tassements de la structure architecturale effective.

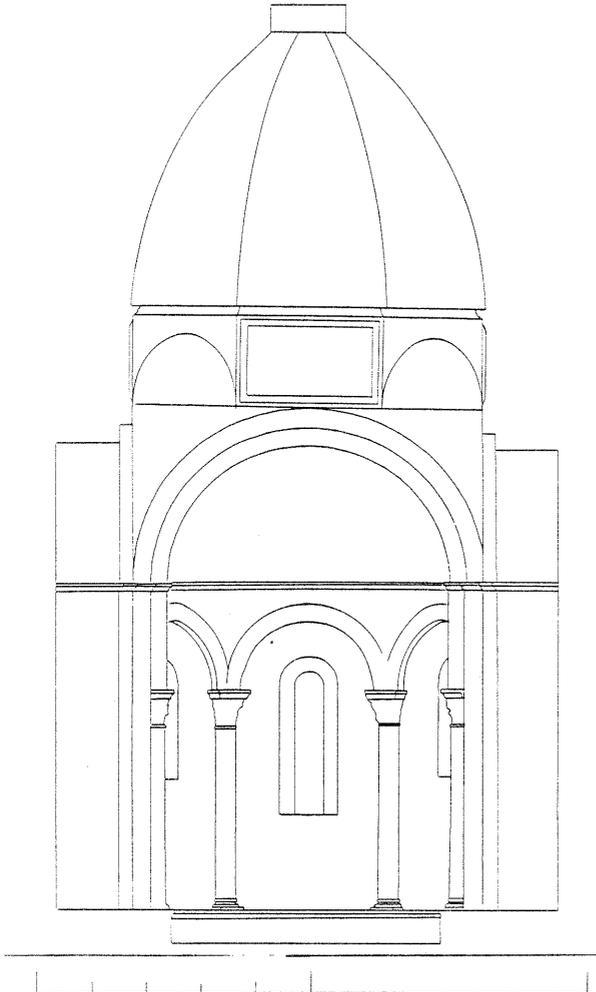
L'application de ces logiciels à des systèmes de voutement permet de prendre pleinement connaissance de la finesse d'analyse qu'ils assurent.

L'église Saint-Philibert de Donzère (Drôme), construite entre 1170 et 1180 et dont les voûtes ont fait l'objet de reconstruction au début du XVII^e siècle, a subi d'abondantes restaurations. La croisée du transept est voûtée d'une coupole sur trompes de plan octogonal dont les relevés photogrammétriques (Cf. Illustrations n° 4 et n° 6) montrent le parfait équilibre et la solide symétrie.

La numérisation de cette voûte à partir de photogrammes nous a conduit à créer des fichiers correspondant à chaque voûtain et à chaque arête.

La définition mathématique que l'on peut donner d'une telle voûte est aisée : il s'agit d'un volume complexe sur plan de base octogonal qui est engendré par la pénétration de huit cylindres dont les axes sont coplanaires et définissent un octogone homothétique de celui du plan de base. Un oculus zénithal recoupe au sommet le volume coupoliforme (Cf. Illustration n° 5).

N° 4 - Coupe transversale sur le voûtement de la dernière travée de nef avec en découverte élévation du choeur



Les premiers calculs effectués définissaient selon des formes mathématiques complexes le stéréomodèle architectural; à ces cylindres de section conique, nous avons substitué, au vu des paramètres, des cylindres de révolution dont les données apparaissent en tableau dans l'illustration n° 8).

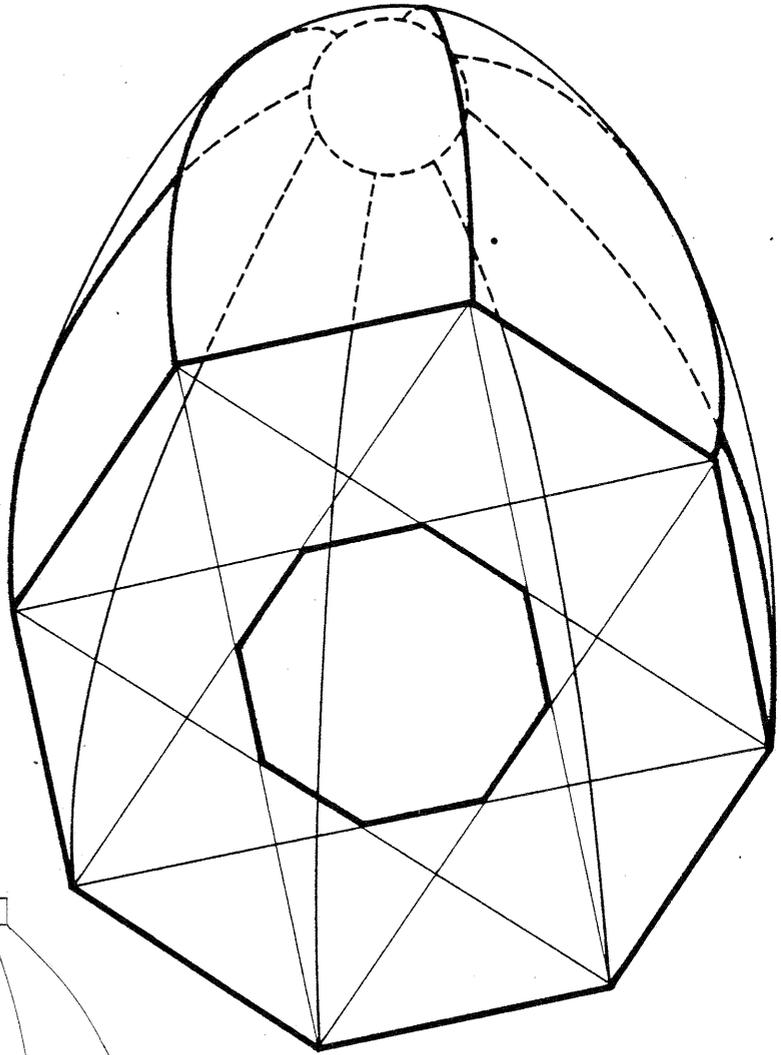
Les faibles écarts (env. 8 mm) constatés entre le modèle mathématique et le stéréomodèle sont de l'ordre de précision du mesurage photogrammétrique; ils n'induisent pas pour autant que le modèle mathématique soit conforme à la conception de l'ouvrage : en effet, les fortes différences entre les rayons des cylindres, près de 30 cm à la moyenne, montrent, outre une certaine imprécision lors de la construction, que le volume a probablement joué et s'est déformé tout en maintenant sa cohérence.

L'orientation des axes aussi bien par rapport à l'horizontale que par rapport aux orientations théoriques dans le plan horizontal (100, 50, 0G, ...) est respectée au grade près mais il faut noter néanmoins le basculement somme toute important du voûtain n° 5 (7 cm par mètre) qui doit être la cause du déplacement d'un claveau de l'oculus (Cf. Illustration° 9).

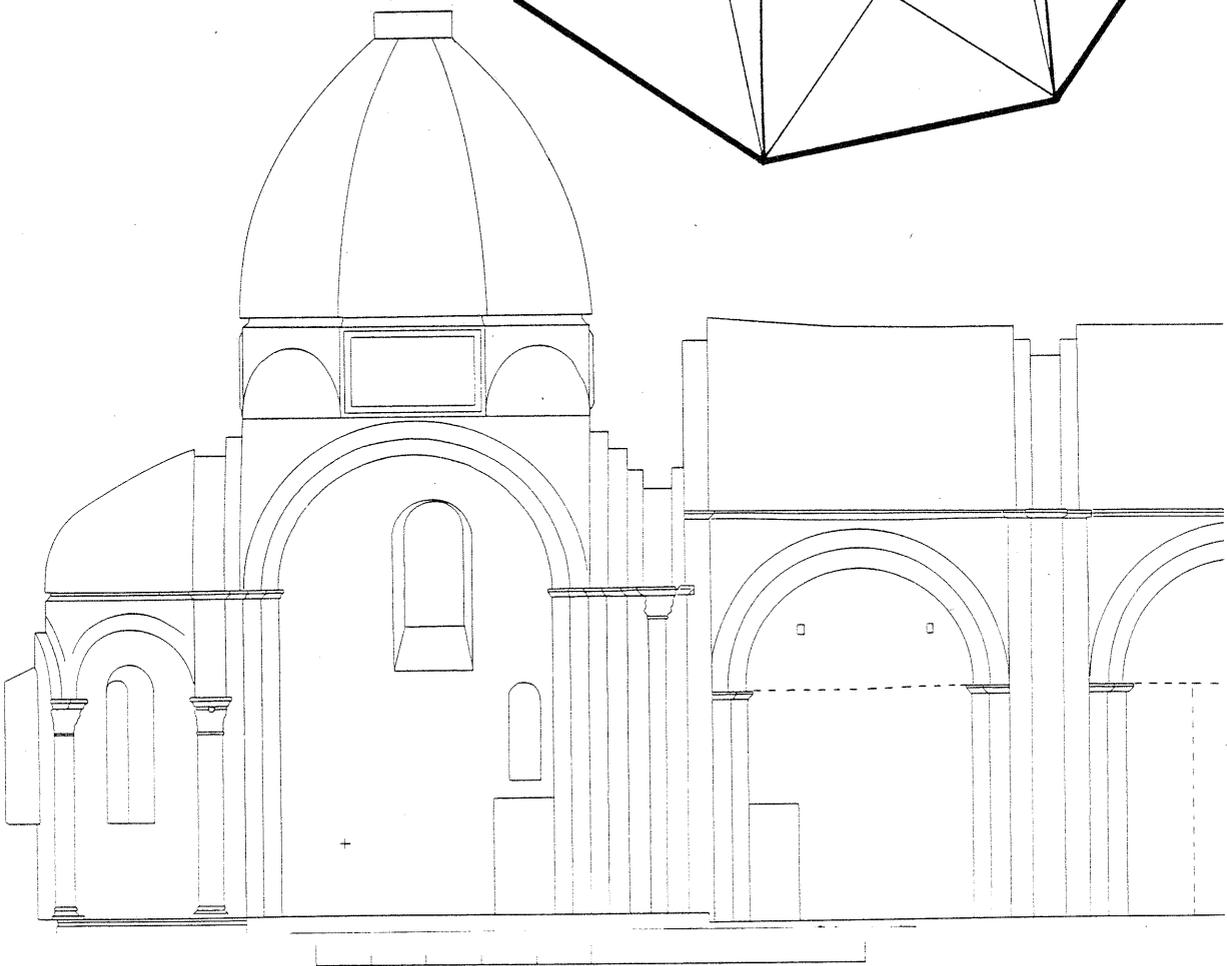
La répartition des écarts sur l'ensemble de la coupole en zones concentriques positives et négatives indique naturellement les déformations de vétusté du type tassement mais peut-être éventuellement doit-on y voir des traces des modes de construction (arrêts dans l'édification par exemple). La fragmentation des fichiers pourrait introduire des interprétations nouvelles de la structure; il est nécessaire que cette fragmentation qui divisera un secteur défini architecturalement (un voûtain par exemple) s'effectue en respectant des principes de construction : selon des plans verticaux ou, comme ici, horizontaux; chaque fichier de voûtain a été découpé selon deux plans. La zone de naissance, probablement construite en tas de charge, se révèle -voûtain par voûtain- très proche d'un plan (moins de 5 mm d'écart moyen), oblique par rapport à la verticale.

Le tracé théorique de la coupole en plan comme en élévation se déduit de constructions élémentaires -comme dans bien des cas- que confirment les résultats de calcul. La travée architecturale de Saint-Philibert de Donzère (Drôme) est de plan carré. Le tracé de l'octogone inscrit dans ce carré peut se faire de multiples façons; une des plus simples est la suivante (Cf. Illustration n° 7) : de chacun des sommets du carré,

N° 5 - Schéma axonométrique du modèle mathématique



N° 6 - Face interne droite du vaisseau principal avec coupe longitudinale sur le voûtement (vue partielle)



on trace un arc de cercle de rayon égal au côté du carré ($= 2a$); ces arcs coupent les diagonales en quatre points qui définissent un second carré (homothétique dans le rapport $(\sqrt{2} - 1)$ du carré de base); le prolongement des côtés du second carré détermine sur les côtés du grand carré l'octogone de base dont les lignes droites joignant les sommets opposés dessineront en plan le système des 8 voûtains de la coupole. En réitérant les constructions, on obtiendra un troisième carré -et un troisième octogone- homothétique du premier dans le rapport $(\sqrt{2} - 1)^2$ et, si l'on applique à ces constructions les données numériques obtenues par numérisation soit un côté du grand carré égal à 6,96 m, on obtient un côté égal à 1,20 m pour le troisième carré, c'est-à-dire l'apothème du petit octogone à 0,60 m; le rayon du cercle exinscrit à cet octogone est alors de 0,65 m soit à 1 cm près le rayon calculé de l'oculus. Ajoutons que l'arc de rayon 6,96 m décrit au mieux la section droite des cylindres.

N° 7 - Schéma théorique de construction

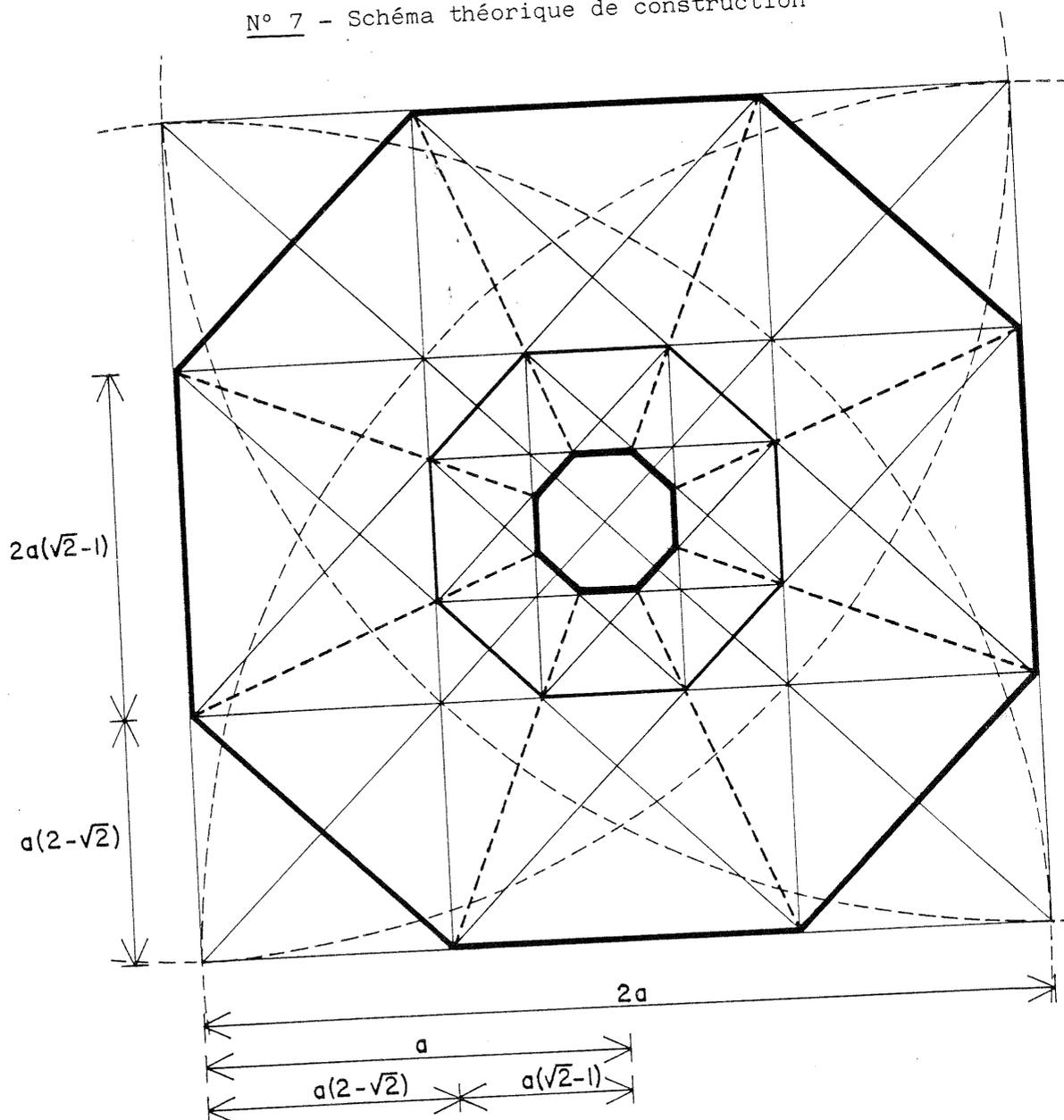
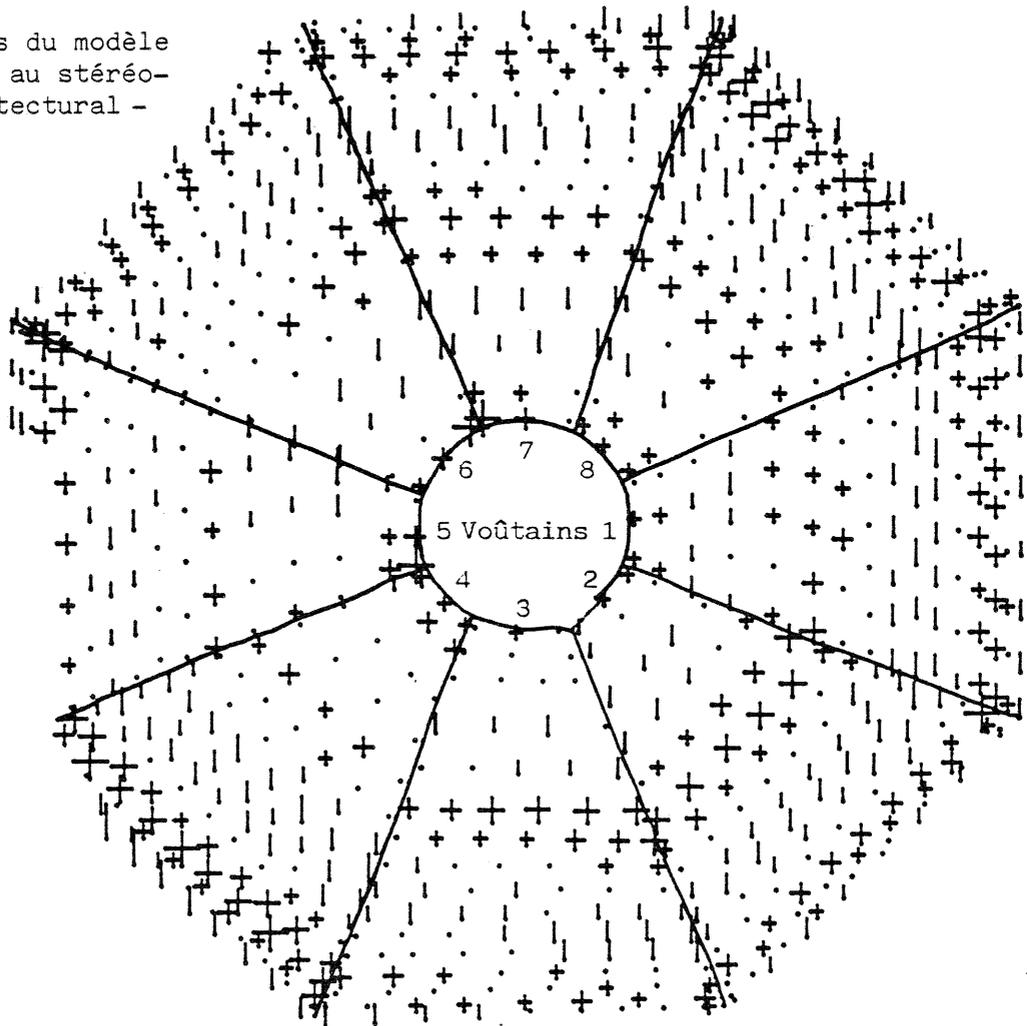


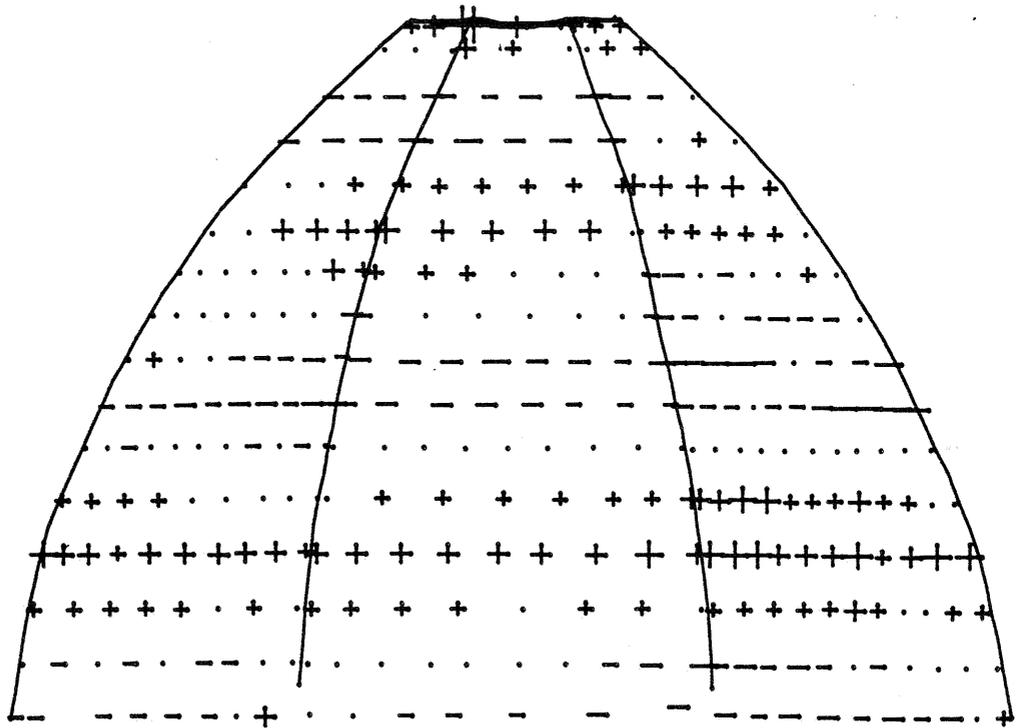
Illustration n° 8 - Modèle mathématique

Voutain	Orientation de l'axe		Rayon	Plan moyen de l'axe	Ecart au stéréomodèle
	par rapport à l'axe des x	par rapport à l'horizontale			
1	- 97,94	- 0,81	6,69	94,22	0,008
2	50,39	0,66	7,08	94,09	0,008
3	0,79	0,97	7,19	94,09	0,009
4	- 49,86	- 1,43	7,01	94,20	0,008
5	- 97,15	4,26	6,96	94,18	0,007
6	50,82	- 0,02	7,23	93,99	0,010
7	- 0,02	- 0,10	6,89	94,14	0,007
8	- 50,77	0,04	6,59	94,27	0,007
Moyennes et écarts	0,98	1,04	6,96	94,14	0,008

N° 9 - Ecart du modèle mathématique au stéréomodèle architectural -
Vue en plan



N° 10 - Ecart du modèle mathématique au stéréomodèle
 architectural - Vue en élévation



Voûtains

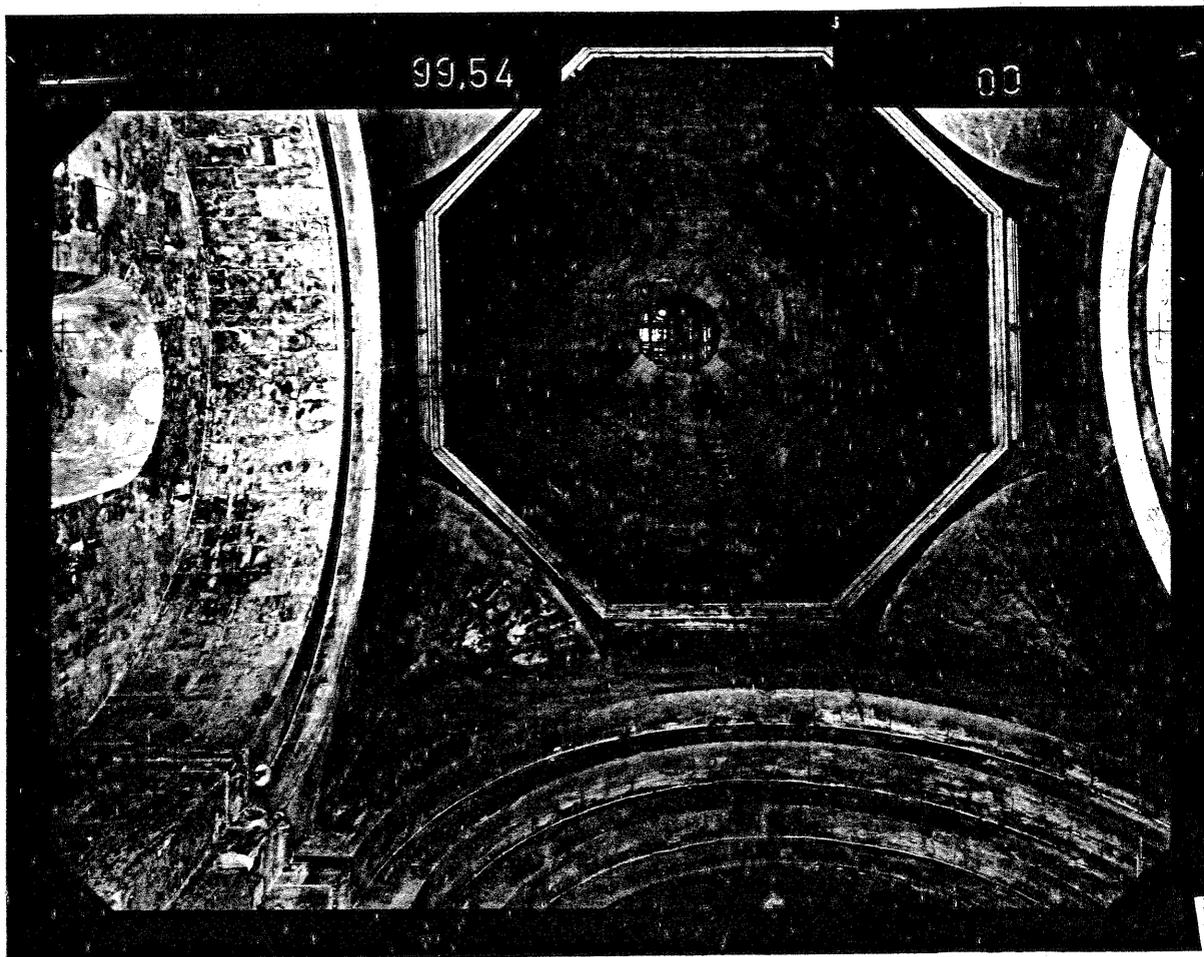
3

1

2

Ainsi, par l'utilisation conjointe de la photogrammétrie et de l'informatique, arrive-t-on à établir des stéréomodèles architecturaux qu'il est loisible de comparer à des modèles mathématiques dont l'analyse ausculte l'équilibre de la structure architecturale et éclaire tant l'histoire des techniques de construction que celle des théories architecturales. Cette méthode et la création de cet outil mis à la disposition de l'architecte-restaurateur et de l'historien rend fondamentalement compte de la démarche de l'Inventaire général des Monuments et des Richesses artistiques de la France : établir une base documentaire et analytique sur l'ensemble du patrimoine français tout en élaborant dans le même instant les outils de traitements qui peuvent en faciliter l'exploitation.

N° 11 - Cliché photogrammétrique de la coupole
de Saint-Philibert de Donzère (Drôme)



Bibliographie sommaire :

- . Jean-Paul SAINT-AUBIN : Spécificités des méthodes de relevés d'architecture : Possibilités et nécessités
Actes du colloque du CIPA - Sibenik, 1978
 - . Jean-Paul SAINT-AUBIN : La photogrammétrie pour la documentation et l'analyse de l'architecture
Actes du colloque du CIPA - Wien, 1981
 - . Jean-Paul SAINT-AUBIN : La représentation de l'architecture et la photogrammétrie
Bulletin de la Société Française de Photogrammétrie et de Télédétection, n° 85 - Paris, 1982
 - . Atelier de Photogrammétrie architecturale de l'Inventaire général : Etude par photogrammétrie de l'architecture industrielle du XIXe siècle.
Paris, 1983
 - . Atelier de Photogrammétrie architecturale de l'Inventaire général : Répertoire des photogrammes d'architecture de l'Inventaire
Paris, 1984
-
 (Restitution graphique et numérique : APAIG - Michel MAUMONT)
 (Clichés photographiques : Inventaire général - B. EMMANUELLI et H. GUILLOU)
